7 класс

Общее количество баллов **35**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

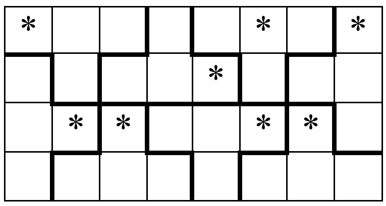
Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Ответ. 495 + 459 = 954.

Решение. Из сложения средних цифр сразу однозначно находится цифра 9, (), так как средние цифры в сумме и во втором слагаемом совпадают; сумма первых одинаковых цифр равна 9 (очевидно, с переносом единицы), и отсюда однозначно находится цифра 4 (); затем из сложения последних цифр однозначно находится цифра 5 ().

Комментарий. Если не показано, что нет других решений, ставить 4 балла.

2. Ответ.



Комментарий. 7 баллов за приведенное разбиение.

3. Ответ. X = 8 или X = 20.

Решение. Утверждения 1) и 5) не могут быть верными одновременно.

Если верно 5), то верны и 2), 3), 4), то есть 4 утверждения верны, а по условию всего 3 верных.

Если верно только 1), то из утверждений 2), 3), 4) ровно одно должно быть неверно. Но из 4) следует 3), из 3) следует 2). Поэтому утверждение 4) верным быть не может. Следовательно, два верных утверждения – это 2) и 3), то есть число X не меньше 8. При этом оно меньше 9 (утверждение 4) не верно). Поскольку число X книг целое, X = 8.

Если не верны ни 1) ни 5), то число X = 20. При этом утверждения 2), 3), 4) справедливы, то есть X = 20 также удовлетворяет условию.

Комментарий. Если решение X = 20 не найдено, снижать на 3 балла.

4. Ответ. 13 минут.

Решение. Пусть x м/мин – скорость Вани, $3x$ м/мин – скорость Саши, $12x$ м/мин – скорость автобуса. За 2 минуты Ваня пройдет $2x$ (м), а автобус проедет $2\cdot 12x = 24x$ (м). Расстояние между остановившимся автобусом и Ваней будет $2x + 24x = 26x$ (м).
Пусть через t минут Саша догонит Ваню. За это время Ваня пройдет расстояние tx, и Саше предстоит преодолеть расстояние $tx + 26x$. С другой стороны, за t минут Саша пройдет расстояние $t\cdot 3x$. Приравнивая, получаем уравнение:

$t\cdot 3x = tx + 26x$, откуда $t = 13$ (мин).

Комментарий. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1–3 балла.

5. Ответ. Не может.

Решение. Чтобы число делилось на 36, оно должно делиться на 4 и на 9. Число, образованное двумя последними цифрами (34), не делится на 4, поэтому его надо изменить. При замене 4 на 0 конце окажется число 30, которое не делится на 4, а замена 3 на 0 даст число 04, делящееся на 4. Поэтому надо проверять только цифру 3. Сумма цифр исходного числа делится на 9 (проще всего это определить, вычеркивая цифры, сумма которых равна 9, но несложно и сосчитать; сумма равна $1\cdot 3 + 24 + 2\cdot 10 + 45 + 3\cdot 5 + 10 = 117$). Сумма цифр измененного числа меньше на $3\cdot 7 = 21$, и равна $117 – 21 = 96$. Число 96 не делится на 9, значит, и само число не делится на 9. Поэтому число не делится и на 36.

Комментарий. При частичном решении, если доказано, что надо проверять только цифру 3 – 3 балла; показано, что полученное число не делится на 9 – 4 балла; баллы суммируются. При верных рассуждениях за арифметические ошибки, не повлиявшие на ответ, снижать на 1 балл, за повлиявшие ошибки снижать на 2–3 балла.

8 класс

Общее количество баллов **35**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Ответ. а) (2), (3), (5), (6) ложны; б) (1), (4) ложны; в) (1), (4), (7) ложны.
Комментарий. За верный ответ только на один пункт (обозначенный буквой) – 1 балл, на два пункта – 4 балла, на три пункта – 7 баллов. Если ответы на пункт частично верные, то отнимается один балл за каждую логическую ошибку.

2. Ответ. Треугольники могут не быть равными.
Решение. Возьмем треугольник со сторонами a, ka и k^2a и увеличим его в k раз. Получится треугольник с такими же углами, а стороны у него будут равны ka, k^2a, k^3a. Остается подобрать число k так, чтобы выполнялось неравенство треугольника. Например, при $a = 8$, $k = 1{,}5$ имеем треугольники со сторонами 8, 12, 18 и 12, 18, 27.
Комментарий. 7 баллов за верный обоснованный пример. Не снимать баллы за отсутствие доказательства утверждения «если у двух треугольников пропорциональны стороны, то их углы равны»; школьники могут использовать этот факт как интуитивно очевидный.

3. Ответ. 177 и числа от 179 до 188.
Решение. Пусть x – наименьшее из написанных чисел. Обозначим через $(x + y)$ вычеркнутое число ($0 \le y \le 11$). Тогда $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x+ 4) + (x + 5) + (x+ 6) + (x + 7) + (x + 8) + (x + 9) + (x + 10) + (x + 11) - (x + y) = 2012$. Приведем подобные слагаемые: $12x + 66 - x - y = 2012$, то есть $11x = 1946 + y$. Отсюда $1946 + y$ делится на 11. Остаток от деления 1946 на 11 равен 10. Учитывая условие $0 \le y \le 11$, получаем, что $y = 1$. Значит, $x = 1947:11 = 177$.
Комментарий. Получен верный ответ, но не доказано, что нет других решений – 3 балла. За ошибки в приведении подобных членов при верных рассуждениях снижать на 1–2 балла. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2–3 балла.

4. Ответ. Оптимальное расположение для киоска – третий корпус.

Решение. Пусть A, B, C – места расположения корпусов, O – место расположения киоска. Тогда суммарное расстояние, проходимое всеми отдыхающими, равно

$$S = 20\cdot OA + 40\cdot OB + 60\cdot OC = 20(OA + OC) + 40(OB + OC).$$

Согласно неравенству треугольника $OA+OC \geq AC$ (причем равенство достигается в том и только в том случае, когда O лежит на отрезке AC), $OB+OC \geq BC$ (причем равенство достигается в том и только в том случае, когда O лежит на отрезке BC). Отсюда следует, что $S \geq 20AC + 40BC$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда O лежит на отрезках AC и BC, то есть совпадает с точкой C. Итак, оптимальное расположение для киоска – третий корпус.

Комментарий. 7 баллов ставить только при наличии строгого доказательства. За верный ответ без объяснений – 1 балл; с разумными объяснениями – от 2 до 5 баллов.

5. Ответ. 160401.

Решение. Заметим, что $\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \dfrac{k^2+k+1}{(k-1)^2+(k-1)+1}$, поэтому числители и знаменатели будут перекрестно сокращаться.

$$\frac{1^2+1+1}{1^2-1+1}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\cdot\frac{3^2+3+1}{3^2-3+1}\cdot\frac{4^2+4+1}{4^2-4+1}\cdot\ldots\cdot\frac{400^2+400+1}{400^2-400+1} =$$

$$= \frac{1^2+1+1}{0^2+0+1}\cdot\frac{2^2+2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{3^2+3+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{4^2+4+1}{3^2+3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{400^2+400+1}{399^2+399+1} = \frac{400^2+400+1}{1} = 160401.$$

Комментарий. Если возможность перекрестного сокращения показана только для некоторых сомножителей, но не доказана в общем виде – 4 балла.

9 класс

Общее количество баллов **35**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

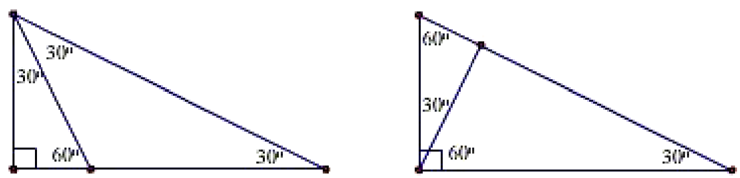
Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. **Ответ. Нет.**

Решение. Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ и они не являются равнобедренными. Возьмем на сторонах AB и $B'C'$ точки N и N' соответственно, так, чтобы $\angle BCN = \angle B'A'N'$. Тогда $\Delta BCN \sim \Delta B'A'N'$ по двум углам ($\angle CBN = \angle N'B'A'$ по условию). В оставшихся треугольниках $\angle ANC = \angle A'N'C'$ (как дополнительные к равным углам), но треугольники подобными быть не могут, так как $\angle N'C'A' > \angle NCA$ и по условию $\angle N'C'A' \neq \angle NAC$.

Комментарий. Для получения полных баллов не обязательно описывать метод построения, достаточно привести разбиения конкретных треугольников с расчетом углов. Простейший пример показан на рисунке.



2. **Ответ. 25.**

Решение. Две остальные вершины B и C треугольника можно выбрать числом способов $8 \cdot 7/2 = 28$. Однако при этом может случиться, что точки A, B и C окажутся на одной прямой. Поскольку A угловая точка, то следует исключить три пары точек B и C (на сторонах квадрата и на диагонали). Таким образом, общее число треугольников равно 25.
Комментарий. Если не исключены точки, лежащие на одной прямой – 4 балла.

3. **Ответ. Увеличится.**

Решение. Рассмотрим произведение чисел, равноотстоящих от среднего числа 1007, то есть $(1007 + k)(1007 - k) = 1007^2 - k^2 < 1007^2$. Из этого следует, что, заменив числа $1007 + k$ и $1007 - k$ на 1007, мы увеличим произведение.
Комментарий. Ответ получен только на основании рассмотрения примеров – 1–2 балла.

4. Ответ. В 3 раза.

Решение. Пусть t_i – время еды i-го зайца; x_i – скорость поедания морковки i-м зайцем (в долях съеденной кучи в единицу времени), будем называть ее производительностью; T – время, за которое все зайцы вместе вчетвером съедят кучу. Тогда суммарная производительность равна $X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, и $X{\cdot}T = 1$.

Из условий следует:

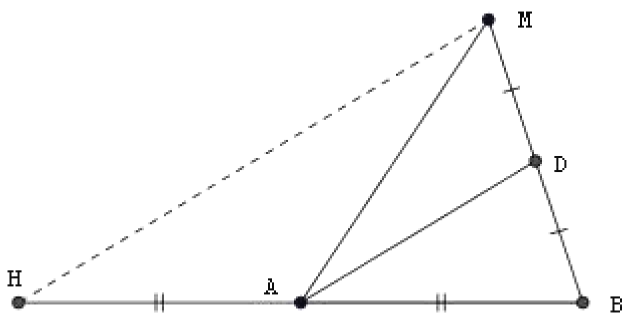
$$t_1{\cdot}x_1 + t_2{\cdot}x_2 + t_3{\cdot}x_3 + t_4{\cdot}x_4 = 1,$$
$$t_1{\cdot}(x_2 + x_3 + x_4) = 1/2,$$
$$t_2{\cdot}(x_1 + x_3 + x_4) = 1/2,$$
$$t_3{\cdot}(x_1 + x_2 + x_4) = 1/2,$$
$$t_4{\cdot}(x_1 + x_2 + x_3) = 1/2.$$

Сложим эти уравнения, получим: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4){\cdot}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 3$, то есть $X{\cdot}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 3$. Получим систему: $X{\cdot}T = 1$, $X{\cdot}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 3$, откуда $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 3T$. Это означает, что все вместе они съедят морковку в 3 раза быстрее, чем если бы ели по отдельности.

Комментарий. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2–3 балла.

5. Ответ. По окружности радиуса 2*a*.

Решение. Проведем в треугольнике ABM через вершину M прямую параллельно медиане AD, эта прямая пересечет прямую AB в точке H.



По теореме Фалеса, $HA = AB$, то есть DA – средняя линия треугольника MBH. Следовательно, $HM = 2AD$, что по условию равно постоянной величине $2a$. Положение точки H также фиксировано (так как положение вершин A и B фиксировано). Таким образом, точка M движется по окружности с центром в точке H и радиусом $2a$. Из этой окружности исключаются две точки, лежащие на прямой AB.

Комментарий. За ответ «окружность», полученный на основании чертежей без доказательства, можно ставить 2 балла, при найденном центре + 1 балл, при найденном радиусе +1 балл. Балл выше 4 возможен только при наличии доказательства.

10 класс

Общее количество баллов **35**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. **Ответ.** $p = 3$.

Решение. У данных чисел разные остатки от деления на 3, поэтому среди них всегда есть одно, которое делится на 3. Поэтому одно из чисел равно 3. Очевидно, это p.

Комментарий. Верный ответ, но не доказано, что нет других решений – 2 балла.

2. **Ответ.** $a = 8$.

Решение. Так как $g(0) = g(1) = 1$, то графиком трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой $x = 0{,}5$. Из условия $|g(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$ следует, что ветви параболы направлены вверх. Ордината вершины параболы равна $g(0{,}5) = 1 - a/4$, это наименьшее значение функции. Наибольшее значение a достигается в случае, когда наименьшее значение функции равно -1.

Из уравнения $1 - a/4 = -1$ получаем: $a = 8$.

Комментарий. Ответ получен только на основании рассмотрения примеров – 2 балла.

3. **Ответ. Одним способом квадраты со сторонами 7, 8, 10, 11 и пятью способами квадрат со стороной 9.**

Решение. Для составления квадрата требуется не менее семи отрезков, так как иначе не меньше двух сторон состояли бы из одного отрезка, а равных отрезков в наборе нет. Из любых 7 отрезков хотя бы один не меньше 7, поэтому нельзя составить квадрат со стороной менее 7. С другой стороны, сумма длин всех отрезков равна 45, и поэтому из них нельзя составить квадрат со стороной более 11 см.

Из отрезков данного набора можно составить стороны длиной 7, 8, 9, 10, 11 следующими способами:

$7 = 6 + 1 = 5+2 = 4+3$,
$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$,
$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$,
$9+1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$,
$9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$.

Следовательно, из данного набора отрезков можно сложить одним способом квадраты со сторонами 7, 8, 10, 11 и пятью способами квадрат со стороной 9 (четыре стороны из пяти можно выбрать пятью способами).

Комментарий. За каждый ошибочный ответ снимать 1 балл. Если не показано, что нет других решений, снимать 2 балла.

4. Ответ. 1:7.

Решение. Пусть E — точка пересечения окружности со стороной AB, отличная от B. Заметим, что $\angle EFK = 180^\circ - \angle EBK = 90^\circ$. Поэтому в треугольнике KED отрезок EF является медианой и высотой. Следовательно, треугольник KED является равнобедренным: $EK = ED$. Пусть $AB = 1$, обозначим длину отрезка AE через x. Тогда, поскольку $EK = ED$, имеем: $(1-x)^2 + (1/2)^2 = EK^2 = ED^2 = x^2 + 1$. Решая полученное уравнение, находим, что $x = 1/8$ и $AE:EB = 1:7$.

Комментарий. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2–3 балла.

5. Ответ. $S = \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную сумму $S_1 = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99...9}_{n \text{ цифр}}$.

Представим эту сумму в виде: $S_1 = (10^1 - 1) + (10^2 - 1) + ... + (10^n - 1) = (10^1 + 10^2 + ... + 10^n) - n$. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, найдем S_1:

$S_1 = \frac{10^{n+1} - 10}{10 - 1} - n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$. Сумма S равна 8/9 S_1, то есть $S = \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$.

Комментарий. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1–3 балла.

11 класс

Общее количество баллов **35**. Решение каждой задачи оценивается Жюри из **7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Ответ. $\boldsymbol{x = \pi/4 + k\pi}$.

Решение. $ab \sin^2 x + (a^2 + b^2) \sin x + ab = ab \cos^2 x + (a^2 + b^2) \cos x + ab$, откуда $(a^2 + b^2) (\sin x - \cos x) + ab (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$, или $(\sin x - \cos x)(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)) = 0$. Уравнение распадается на два: $\sin x - \cos x = 0$, $\sin x + \cos x = -(a^2 + b^2)/ab$.

Первое уравнение имеет решение $x = \pi/4 + k\pi$, второе уравнение не имеет решений, так как $|(a^2 + b^2)/ab| \geq 2$, а $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$.

Комментарий. Получен верный ответ, но не доказано, что нет других решений – 2 балла.

2. Ответ. $\boldsymbol{(p, q) = (0, 0), (1, -2), (-1/2, -1/2)}$.

Решение. Пусть p и q представляют собой два (возможно, совпадающих) корня уравнения $x^2 + px + q = 0$. По теореме Виета $pq = q$, то есть $q = 0$ или $p = 1$; при этом $p + q = -p$, то есть $q = -2p$. Получаем пары (p, q): $(0, 0)$, $(1, -2)$.

Осталось рассмотреть случай, когда $p = q \neq 0$ представляет собой один и тот же корень уравнения $x^2 + px + q = 0$. Второй корень, очевидно, равен 1. Из уравнения $1 + p = -p$ находим $p = -1/2$; получаем пару (p, q): $(-1/2, -1/2)$.

Комментарий. При потере решения $(-1/2, -1/2)$ снимать 3 балла.

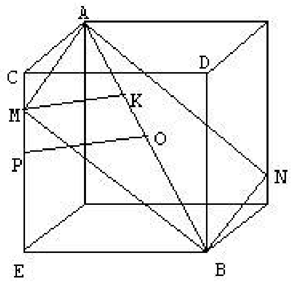
3. Ответ. $\dfrac{2010 \cdot 2011}{2} = 2021055.$

Решение. Первое слагаемое может принимать значения от 1 до 2010; если оно равно 1, то второе слагаемое может принимать значения от 1 до 2010 (2010 способов), если первое слагаемое равно 2, то второе слагаемое может принимать значения от 1 до 2009 (2009 способов), и т.д. Общее число способов равно сумме $2010 + 2009 + 2008 + \ldots + 2 + 1 = \dfrac{2010 \cdot 2011}{2} = 2021055.$

Комментарий. В решении может быть использовано число сочетаний (C^2_{2011}), в этом случае должно быть обосновано применение этой формулы. За арифметические ошибки при верном способе подсчета снимать 2–3 балла.

4. **Ответ. Плоскость должна проходить через середину любого ребра, скрещивающегося с диагональю, S $= \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.**

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что секущая плоскость пересекается с ребром куба EC; в сечении получается параллелограмм *AMBN*.



Его площадь равна $|AB|\cdot|MK|$, где MK – перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AB, значит, площадь будет наименьшей при наименьшем значении $|MK|$. Среди отрезков, соединяющих точки скрещивающихся прямых EC и AB, наименьшую длину имеет отрезок, перпендикулярный к каждой из прямых (общий перпендикуляр). Докажем, что им является отрезок OP, соединяющий середину P стороны CE с серединой O диагонали AB. По построению $AO = OB$, треугольник APB – равнобедренный, следовательно, медиана OP является высотой и $OP \perp AB$. Треугольник EOC также равнобедренный, и OP – его медиана, поэтому $OP \perp EC$. Длина OP равна $\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Наименьшая площадь равна $S = |AB|\cdot|PO| = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Комментарий. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1–3 балла.

5. **Ответ. Не могут.**

Решение. Занумеруем яблони по часовой стрелке числами от 1 до 20. Обозначим количество шмелей на k -й яблоне в какой-нибудь момент времени через a_k (на первой яблоне – a_1 , на второй – a_2 и т.д.). Рассмотрим выражение

$S = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \ldots + k\cdot a_k + \ldots + 20\cdot a_{20}$.

Покажем, что когда два шмеля перелетают на соседние яблони в противоположных направлениях, то S либо не меняется, либо меняется на 20. Действительно, пусть какой-то один шмель перелетает с i-ой яблони на $(i + 1)$-ю, тогда в сумме S меняются два слагаемых. Если $i \le 19$, то слагаемые $i\cdot a_i + (i + 1)\cdot a_{i+1}$ заменяются на $i\cdot(a_i - 1) + (i + 1)\cdot(a_{i+1}+1) = i\cdot a_i + (i + 1)\cdot a_{i+1} + 1$, то есть сумма увеличивается на 1. Если $i = 20$, то меняются 20-е и первое слагаемые, а их прежняя сумма $20\cdot a_{20}+ a_1$ становится равной $20\cdot(a_{20}-1) + 1\cdot(a_1+1) = 20\cdot a_{20}+ a_1 - (20 - 1)$, то есть уменьшается на 19. По условию одновременно другой шмель перелетает с j-ой яблони на $(j - 1)$-ю. Аналогично при этом изменяются два слагаемых и сумма или уменьшается на 1, или увеличивается на 19. Поэтому, когда два шмеля одновременно перелетают на соседние яблони (один по часовой стрелке, другой – против), то сумма S может измениться на (+1-1) или на (+1 +19) или на (-19 -1) или на (-19 +19), то есть или не меняется, или меняется на 20. Это означает, что остаток от деления S на 20 не меняется. В начальный момент времени на каждой яблоне сидит шмель, следовательно, $S_0 = 1\cdot1 + 2\cdot1 +... + 20\cdot1=1 + 2 + ... 20 = (20\cdot(20 + 1))/2 = 210$. Число 210 имеет остаток 10 от деления на 20, такой же остаток будет иметь S в любой момент времени. Но если все шмели соберутся на одной яблоне (пусть ее номер будет m), то $S = m\cdot20$, остаток от деления S на 20 равен 0, что невозможно.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.